

1)

- a) Base de los vectores $\mathbb{R}^3 \{ (1, 2, 1) (0, -1, 1) (1, 0, 1) (3, 0, 3) \}$
 + No son base porque hay 4 vectores en $\mathbb{R}^3$ no son L.I., luego no son base.
- b) Calcular las ecuaciones del subespacio vectorial generado por $\{(v_1, v_2)\}$ indicando dimensión y base del mismo.

- c) Calcular el valor de a para que $(2, 2, a)$ pertenezca al subespacio anterior.

$$a) \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

↓

Det $1+1=2$

Por los teoremas de la base, este conjunto de vectores es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$

$\text{rg} = 3 \Rightarrow 3$ vectores lineal indep, en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ esos 3 son base)

$$b) \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 = \dim L$$

↓

Al ser 2, sabemos que son base $B \{ (1, 2, 1) (0, -1, 1) \}$

$$L = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

• Creación de ecuaciones.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} \Rightarrow 2x - 2 - y + x = 0 \Rightarrow \boxed{3x - y - z = 0}$$

$\text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \rightarrow$ tiene que tener el mismo rango que la anterior "2" por eso el Det tiene que ser "0".

c) Con la ecuación sólo tengo que sustituir en el vector que tengo.

$$(2, 2, a) \rightarrow 3x - y - z = 0$$

$$3 \cdot 2 - 2 - a = 0 \Rightarrow 4 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

2.) Dada una transformación lineal con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

• Estudie si es diagonalizable y en caso de serlo exprese la relación entre a y su matriz diagonal semejante. Calculando la matriz de paso "P"

• Calcule los autovalores.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ (doble)} \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Si todos los valores fueran distintos sería diagonalizable

* Para $\lambda_1 = 1$

$$\text{rg}(A - \lambda_1 I) = \begin{vmatrix} 1-1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si con rg fuera 2, No sería diagonalizable ya no daría con $\mathbb{R}^3$.

$$\dim(\mathcal{L}(\lambda_1)) = 3 - 1 = \boxed{2}$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}^3$

* Para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 1-2 & 2 & 2 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 0 & 1 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\dim(\mathcal{L}(\lambda_2)) = 3 - 2 = \boxed{1}$$

$$\dim(\mathcal{L}(\lambda_1)) + \dim(\mathcal{L}(\lambda_2)) = 2 + 1 = \boxed{3} \rightarrow \text{ES DIAGONALIZABLE}$$

↓
Porque coincide con $\mathbb{R}^3$

Continuación 2/ $\Delta = P D P^{-1}$

Calculo "P" (auto vectores)

* $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [0 \ 1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 + y + z = 0 \Rightarrow \boxed{y = -z}$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad B = \{ (1, 0, 0), (0, -1, 1) \} \leftarrow \text{son 2 porque su Dim} = 2$$

* $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2z} \\ -y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad B = \{ (2, 0, 1) \} \leftarrow \text{solo 1 porque su Dim} = 1$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_P \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_D \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + xy + xz$

a) Estudie su comportamiento y tendencia en el $P(1,1,1)$ y en la dirección del vector $(1, -2, 1)$

b) Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

a) $f'_v(1,1,1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -1 < 0 = \text{Decreciente}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 + y + z \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 2 \cdot 1 - 2 + 1 + 1 = 2 = \boxed{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = \boxed{3}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = \boxed{3}$

$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$f''_{D_v}(1,1,1) = (1, -2, 1) \begin{matrix} \uparrow \text{Dirección} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \uparrow \text{Momento de vector} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \text{Dirección en columna}$

$= [-1 \cdot 3 \cdot 3] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 > 0 \Rightarrow \text{Decreciente Decelerando}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 + y + z \rightarrow 2x - 2 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x \Rightarrow \boxed{y = -\frac{x}{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + x = 0 \Rightarrow \boxed{z = -\frac{x}{2}}$

Sigue para
⊗ calcular puntos críticos

$$4. \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} H_1 = 2 > 0 \\ H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \\ H_3 = |H| = 8 - 4 = 4 > 0 \end{array} \right\} \text{Definida Positiva} \Rightarrow \underline{\text{Mínimo}}$$

4.

$$a) \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx \Rightarrow \int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C$$

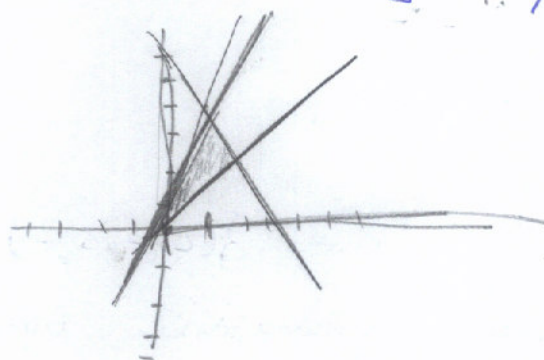
$$b) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int (\sin x)^{-1/2}$$

5. Calcular el área comprendida entre las funciones $y = 6x$,

$$y = x^2, \quad y = 8 - 2x$$

$$6x = 8 - 2x$$

$$8x = 8 \Rightarrow \underline{x = 1}$$



$$-x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 6x - x^2 dx + \int_1^2 8 - 2x - x^2 dx = \left(6 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(8x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2$$

$$= \left[\left(3 \cdot 1^2 - \frac{1}{3} \right) - 0 \right] + \left[8 \cdot 2 - 2^2 - \frac{2^3}{3} - 8 + 1 + \frac{1}{3} \right] =$$

$$= \frac{8}{3} + \left[5 - \frac{7}{3} \right] = \frac{16}{3} \text{ u}^2$$

MATEMATICAS.

Operación Interna: Cuando la operación de un grupo y el resultado son del mismo grupo. Ej: $N + N = N$; $N = \text{Números Naturales}$.

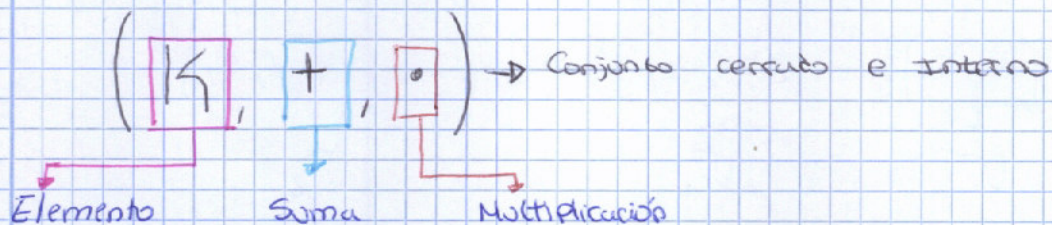
Operación Cerrada: Cuando solo tiene 1 resultado a la operación.
Ej: SUMA.

*NOTA: La división no es cerrada porque me da cociente y resultado.

Asociativa: La suma, solo suma de dos en dos. Yo le doy dos n números y me devuelve 1. Cuando tengo más utilizo la asociatividad.

Elemento opuesto: Es el número que hace "0" a mi ecuación

$$Ej: a + \underset{-a}{\boxed{?}} = 0 = \underset{-a}{\boxed{?}} + a$$



$$\mathbb{R} = K$$

$$\mathbb{R}^2_{(1,2)} = \mathcal{V}$$

$$v_3 = (1, 2) = \left(\underbrace{v_3 \cdot 1}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{v_3 \cdot 2}_{\in \mathbb{R}} \right) \in \mathbb{R}^2$$

La suma de dos vectores (v) es un vector (w)

$$(k + k') \cdot v = \underbrace{k \cdot v}_w + \underbrace{k' \cdot v}_{w'} = w + w' \in \mathcal{V}$$

$$\underbrace{(2 \cdot 3)}_{\substack{\text{Multiplicación} \\ \text{Números}}} \cdot \underbrace{(1, 2)}_{\text{Vector}} = \underbrace{(6, 12)}_{\text{Resultado}} = 2 \cdot \underbrace{(3, 6)}_{\substack{\text{Número} \\ \text{x} \\ \text{Vector}}} = 2 \cdot \underbrace{(3 \cdot (1, 2))}_{\substack{\text{Número} \\ \text{x} \\ \text{Vector}}}$$

• Cualquier número por el vector $(0, 0)$, me devuelve el vector 0

$$K \cdot (0, 0) = 0$$

$$(0, 0) \rightarrow \text{Vector } 0$$

$$V = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$$

VECTOR

$$(-V) = (-1, -2) \in \mathbb{R}^2$$

VECTOR OPUESTO

$$\bullet k \cdot (-v)$$

$$3 \cdot (-1, -2) = (-3, -6)$$

$$\bullet (-k) \cdot v$$

$$(-3) \cdot (1, 2) = (-3, -6)$$

$$\bullet k = 3$$

$$\bullet (-k \cdot v)$$

$$-(3(1, 2)) = -(3, 6) = (-3, -6)$$

• Combinación lineal de vectores

$$(1, 2) = 2 \cdot (1, 3) + (-1) \cdot (1, 4)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 v v_1 v_2

• Un vector es linealmente dependiente si alguno de los números es $\neq 0$

$$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n \cdot v_n = 0$$

$$v = \frac{k_2}{(-k_1)} v_2 + \frac{k_3}{(-k_1)} v_3 + \dots + \frac{k_n}{(-k_1)} v_n$$

EJEMPLO:

Este conjunto $\{(-1, 2), (1, 1), (3, 5)\}$ ¿es linealmente independiente o dependiente?

$$\text{Si } \alpha(-1, 2) + \beta(1, 1) + \gamma(3, 5) = 0$$

$$\text{Si } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Números

Si solo es 1 distinto de 0 los vectores son linealmente dependientes

• Hacemos un sistema para saber los números de α, β, γ

$$\left. \begin{aligned} -\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma &= 0 \end{aligned} \right\}$$

→ OTRA MANERA.

$$(1, 1) = k_1 \cdot (-1, 2) + k_2 (3, 5)$$

$$\begin{cases} 1 = -k_1 + 3k_2 \\ 1 = 2k_1 + 5k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = \frac{2}{11} \\ k_2 = \frac{3}{11} \end{matrix} \rightarrow \text{Son las coordenadas de } v(1,1) \text{ respecto a los vectores } (1,2) (3,5)$$

$$(1, 1) = \frac{-2}{11} (-1, 2) + \frac{3}{11} (3, 5)$$

$$V = k_1 v_1 + k_2 v_2 \Rightarrow k_1, k_2 \neq 0$$

• Si meto los vectores en una matriz, el Rango te dice que número de vectores tiene linealmente dependientes

$$M \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Rango (M) = 2 ← Tiene 2 vectores linealmente dependientes

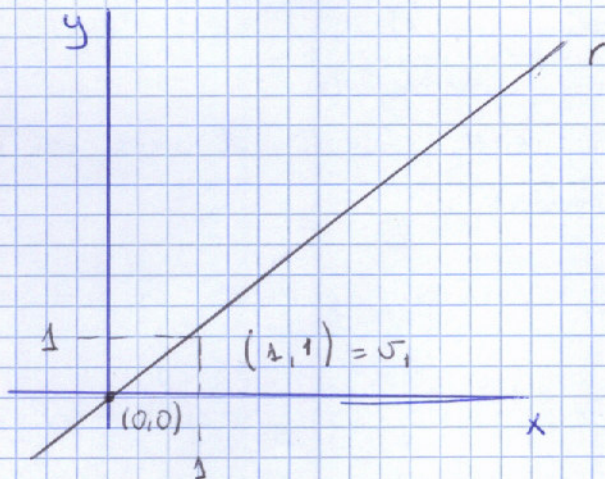
SISTEMA GENERADOR

$$\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\} \rightarrow \text{Base de un Espacio Vectorial}$$

$\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ son base del espacio vectorial V si y sólo si $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ es un sistema generador de V y si no se repiten $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$, es decir, que sean linealmente independientes.

- Si sale DEPENDIENTE → NO BASE
- Si sale INDEPENDIENTE → BASE

• ESPACIO VECTORIAL "R"



- Como puedo bajar el $(2,2)$ del $(1,1)$

$$(1,1) = \frac{1}{2} (2,2)$$

$\{(1,1), (2,2)\} \rightarrow$ Conjunto de vectores linealmente dependientes

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow$ Como un menor $|1| = 1 \neq 0 \rightarrow$ Es linealmente independiente.

• Base de $r = \{(1,1)\}$

A partir de mi base ya puedo crear todo el espacio vectorial.

$$(2,2) = 2(1,1)$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,1)$$

$$(-2, -2) = -2(1,1)$$

* Para sacar la coordenada, Tengo que hacer el sistema entre el vector Base y el vector $(2,2)$. Tengo que poner el vector como combinación lineal.

- ¿Cuales son las coordenadas de $(4,4)$ con la Base $(1,1)$

$$(4,4) = \alpha \cdot (1,1)$$

$$4 = \alpha \cdot 1_1 \rightarrow \alpha = 4 \cdot 1_1 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$4 = \alpha \cdot 1_2 \rightarrow \alpha = 4 \cdot 1_2 \rightarrow \alpha = 4$$

- ¿Cuales son las coordenadas de $(3,2)$ con la Base $\{(0,-1), (1,1)\}$

$$(3,2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,-1)$$

$$3 = \alpha_1 \cdot 1 + 0 \cdot \alpha_2$$

$$2 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(-1)$$

$$\alpha_1 = 3 \quad \alpha_2 = 1$$

Coordenada $(3,1)$

$\rightarrow$ Sistema compatible determinado

$\rightarrow$ Si el sistema no tiene solución, el vector no habita en el espacio vectorial

Las coordenadas de un vector respecto de una base dada, son únicas.

La base de un espacio vectorial no es única, hay miles de bases de un espacio vectorial, porque puedo elegir cualquier vector.

Base = Sistema generador $\rightarrow$ tiene que tener vectores linealmente independientes.

EXERCICIO.

- Dado el conjunto $\{(-1, 2), (1, 1), (3, 5)\}$

- Halle las coordenadas del vector $(0, 1)$ respecto de dichos vectores.

$$(0, 1) = \lambda_1 (-1, 2) + \lambda_2 (1, 1) + \lambda_3 (3, 5)$$

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \end{cases}$$

• SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.

- Demuestre que $\{(-1, 2), (1, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

$$B_r = \{(-1, 2), (1, 1)\} \rightarrow [a, a^2] = \lambda_1 (-1, 2) + \lambda_2 (1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad R_y \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \quad \lambda_1 = \left(\frac{1}{3}\right) \\ \lambda_2 = \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow (0, 1) = \frac{1}{3}(-1, 2) + \frac{1}{3}(1, 1) \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

- La cantidad de vectores que necesito para formar la base, cualquier base formada por x , esas veces es la misma cantidad.

BASE CANONICA O ESTANDAR

Es la base que esta formada por unos vectores que tienen "1" en alguna coordenada y el resto de coordenadas son "0". Y a eso les llamamos E_1, E_2, E_3 dependiendo donde este colocado el "1"

$$B_{\text{canonica}} \{ (1, 0), (0, 1) \} = \{ (E_1), (E_2) \}$$

$$(3, 7) = 3 \cdot (1, 0) + 7 \cdot (0, 1)$$

DIMENSION: Número de vectores de la Base $\rightarrow$ ES UNICA

BASE $\left\{ \begin{array}{l} - \text{conjunto de vectores} \\ - \text{Sistema generador de } V \\ - \text{Los vectores son Linealmente Independiente} \end{array} \right.$

De un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ hacemos la matriz y miramos el rango y con ese rango cogemos los linealmente independientes. Y esos valores forman mi base.

EJERCICIOS ALGEBRA LINEAL.

EJERCICIO 2.

$$v_1 = (1, 2, a, 1) \quad v_2 = (a, 1, 2, 3) \quad v_3 = (0, 1, b, 0)$$

a) Determine a y b para que los tres vectores sean linealmente dependientes

$$M \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Hay 3 vectores linealmente dependientes} \\ \text{Si todos los menores de Orden 3} = 0 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \end{vmatrix} = b + a^2 - 2ab - 2 = 0$$

$$b + 3^2 - 6b - 2 = 0$$

$$\boxed{b = 7/5}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = a - 3 = 0 \quad \boxed{a = 3}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7/5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 14/5 + 6 - 2 - 14/5 = 0$$

EJERCICIO 4

a) Determine x e y para que v_3 pertenezca al subespacio v_1 y v_2

b) Encuentre las ecuaciones de dicho subespacio.

$$v_1 = (1, 4, -5, 2) \quad v_2 = (1, 2, -3, 1) \quad v_3 = (3, 2, x, y)$$

$\mathbb{R}^4$

v_3 = combinación lineal v_1, v_2

v_3 = Pertenece al espacio generado por v_1, v_2

$$\{v_1, v_2, v_3\} \text{ son linealmente dependientes} \Rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} < 3$$

Todos los menores de Orden 3 = 0

$$v_1 = (1, 4, -5, 2)$$

$$v_2 = (1, 2, -3, 1)$$

$$v_3 = (3, 2, x, y)$$

$$x_2 = 3 - 2 + x_1$$

$$\boxed{x_2 = 5}$$

$$x = 10 - 15 \rightarrow \boxed{x = -5}$$

$$(3, 2, x, y) = x_1(1, 4, -5, 2) + x_2(1, 2, -3, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = x_1 + x_2 \\ 2 = 4x_1 + 2x_2 \\ y = 2x_1 + x_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 = 2x_1 - 3x_2 \\ 2 = 4x_1 + 2x_2 \\ -4 = 2x_1 \end{array}$$

$$\boxed{x_1 = 2}$$

$$y = 4 + 5 \Rightarrow \boxed{y = 9}$$

Definición Espacio Vectorial: $v_1 + v_2 = v_3$
 $k \cdot v_1 = v_2$

• Base espacio vectorial: $B_v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

v_i son Sistema Generador

v_i son Linealmente Independientes

Dimensión $V = n$

v_1, v_n son Linealmente Independientes si y solo si la matriz formada por los vectores si su rango es el número "n".

Si me sale el número que no sea "n" tenemos que mirar todos los menores (1 menor q la matriz) y si uno no me sale diferente de "0" es menor (es decir, son vectores) son Linealmente Independientes y su rango es (si es una matriz de orden 4 pero es 4) el mismo que su orden.

Si todos me salen "0" sigo haciendo lo mismo de antes pero con los menores de los menores (1 menor que el menor de antes)

• Un Vector "w" que sea combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_n\}$ que puedo afirmar que "w" pertenece a mi espacio vectorial

• Si Vector "w" no es combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_n\}$ es Linealmente Independiente.

• Cuando "w" lo expresamos como combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_n\}$ y te salen las coordenadas de "w" respecto a la base $\{v_1, \dots, v_n\}$

EJERCICIO DE VECTORES.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como son distintos
 "0" son L.I
 los vectores v_1, v_2, v_3

Como no hay menores de 4,
 no todos van a ser L.I

• Si son un Sistema generador porque 3 de mis vectores son L.I, y como son 3 pueden formar una base.

• SISTEMA GENERADOR son los CUATRO.

• BASE son sólo v_1, v_2, v_3

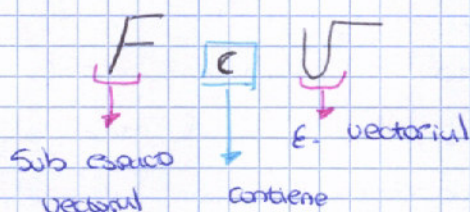
BASE $\rightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ SISTEMA GENERADOR

d) Calcula las coordenadas de un vector, respecto de una Base
 $(2, -1, -3) = \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(0, 2, 1) + \lambda_3(1, 0, 1)$

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ -1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -3 = \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

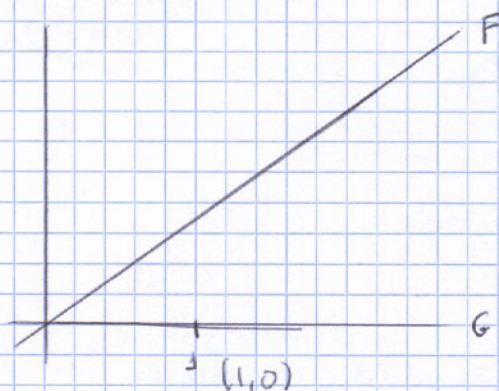
$$\begin{aligned} 2 &= \lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 \quad 2 = 5 + 2\lambda_3 + \lambda_3 \rightarrow -3 = 3\lambda_3 \Rightarrow \boxed{-1 = \lambda_3} \\ -1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \rightarrow -1 = \lambda_1 - 4 \Rightarrow \boxed{3 = \lambda_1} \\ -3 &= \lambda_2 + \lambda_3 \rightarrow 2 + (-3 = \lambda_2 + \lambda_3) \\ -3 &= \lambda_2 - 1 \quad 5 = \lambda_1 = 2\lambda_3 \\ \boxed{-2 = \lambda_2} \quad 5 + 2\lambda_3 &= \lambda_1 \end{aligned}$$

SUBESPACIO VECTORIAL.



Vector de subespacio
 +
 Vector de subespacio
 VECTOR

- Como dos Vectores de "S" (Subespacio) hacemos la combinación lineal y si caen en "S" lo que tenemos es un Espacio Vectorial de "S".
- El subespacio "S" es el conjunto de vectores que solo se hacen la combinación lineal de los que he cogido.
- Si del subespacio vectorial tengo linealmente independiente lo que tengo es la base.



$$G = (1, 0)$$

$$B_F (1, 1) \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$V_2 = (2, 2) = 2(1, 1)$$

Las coordenadas de V_2 respecto de B_F son (2). Desde el punto de vista de una recta puedes decir $V(2)$, pero en el plano tiene que ser $2 \cdot (1, 1) = (2, 2)$

En esta recta voy a tener 1 coordenada respecto la recta y 2 respecto al plano $(3) \cdot (1, 0) = (3, 0)$

Tengo el subespacio vectorial (F) dentro del espacio $(\mathbb{R}^3)$ generado por $\{e_1, e_2\}$

$F = (2, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ si fuera combinación lineal de $B_F = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ formara parte del plano. La dimensión de $F = 2$

$$(a_1, a_2, a_3) = \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0)$$

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda_1, \lambda_2, 0) \rightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda_1 \\ a_2 = \lambda_2 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

∇_1 respecto de $\mathbb{R}^3$ $(2, 1, 0) \in F$

$$(2, 1, 0) = \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0)$$

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix} \right\} \nabla_2' = (2, 1)$$

$W = (-1, 2) \in F \rightarrow$ lo quiero pasar a $\mathbb{R}^3$

• Como la Base $F = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

$$\begin{aligned} W &= -1 (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) = \\ &= (-1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

EXERCICIO ALGEBRA LINEAL.

10. b) Calcular a y b para que el vector $(0, 1, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores: $v_1 (2, 0, 2, 1)$ $v_2 (1, 2, 1, 3)$ $v_3 (1, 0, 1, 3)$ $v_4 (2, 4, 2, 6)$

$$(0, 1, a, b) = \lambda_1 (1, 2, 1, 3) + \lambda_2 (1, 0, 1, 3) + \lambda_3 (2, 4, 2, 6)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a \\ 3 & 3 & 6 & b \end{vmatrix} = 0 ; 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 6 & b \end{vmatrix}}_{12a + 6 - 6 - 4b = 12a - 4b} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 6 & b \end{vmatrix}}_{4b + 12a + 6 - 12a - 4b = 6} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 3 & b \end{vmatrix} = 0$$

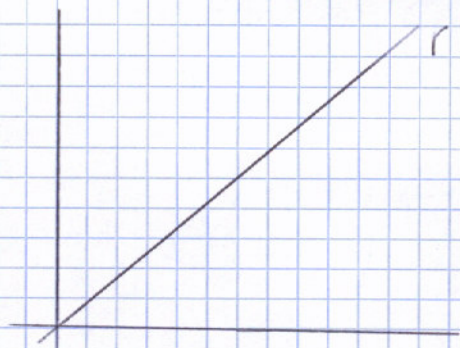
$$v_2, v_3, v_4 = 0 \Rightarrow 12a - 4b + 0 + 2(4b - 12a) = 0$$

$$12a - 4b + 8b - 24a = 0$$

$$-12a + 4b = 0$$

$$4b = 12a$$

$$\boxed{b = \frac{12}{4} a}$$



r es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

$$\dim(r) = 1$$

$$\text{Base } r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Un vector pertenece a r sólo si es combinación lineal de $(1,1)$, sólo si el rango de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v \right) = 1$, sólo si el determinante de esa matriz es "0"

$$\mathbb{R}^2 \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ 1 & v_2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0 \quad \underline{y - x = 0} \rightarrow \text{Ecuación de } F \text{ (subespacio)}$$

F es espacio vectorial

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rightarrow \text{Pertenece a } F$$

$$0 \in F$$

$$\forall v_1, v_2 \in F \Rightarrow B_F$$

DIMENSION DE UN SUBESPACIO VECTORIAL

$$\text{Sea } F \subset V \Rightarrow 0 \leq \dim(S) \leq \dim(V)$$

• PROPOSICIÓN.

S subespacio vectorial de V los vectores de la base " S " son menores que los de la base V

$$\dim(S) \leq \dim(V)$$

$$0 \in S$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in S$$

$$v_1 - v_1 \in S$$

$$A = \left(\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_r}_{\text{Es base de } S}, v_{r+1}, \dots, v_n \right)$$

$$\text{Rango}(A) \leq r+1.$$

todos los menores de $r+1$ tienen que ser 0

S subespacio vectorial donde A es la matriz formada por los vectores de base S

$$S = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / AX = 0 \right\}$$

$$\boxed{\dim(S) = \dim(V) - \text{rang}(A)}$$

COMPROBACIÓN.

$$\lambda \left[\begin{pmatrix} 1, 1, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, 2, 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{cases} \text{Es subespacio vectorial que} \\ \text{está dentro de un espacio vectorial} \\ \text{de orden 3} \end{cases}$$

$$\dim(L) = \text{rg} \left[\begin{pmatrix} 1, 1, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, 2, 2 \end{pmatrix} \right] = 1$$

$\dim(S) = 1 \rightarrow$ Porque solo hay 1 linealmente independiente.

$$\text{Base}_L = \left\{ \begin{pmatrix} 1, 1, 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \quad \text{Rang}(A) \leq 2 \text{ solo si un menor } (M) \text{ es igual a } 0$$

Uno de estos elementos (x, y, z) pertenecen a B_L si (x, y, z) es combinación lineal de 1

• Ecuaciones - ¿Cuántas son?

$$\dim(S) = \boxed{\dim(V)} - \text{rg}(A)$$

$$1 = 3 - \text{rg}(A)$$

$$1 = 3 - n^{\circ} \text{ ecuaciones}$$

Es $\mathbb{R}^3$ y por eso su dimensión es 3

$$A \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow \text{Calcule 2 menores de Orden 2. Porque} \\ \text{Solo necesito 2 ecuaciones.} \\ \left| \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} \right| = 0 \text{ solo si } \boxed{y - x = 0} \\ \left| \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{pmatrix} \right| = z - x = 0 \text{ solo si } \boxed{z - x = 0} \end{cases}$$

• Hallar Base de estas ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} y - x = 0 \\ z - x = 0 \end{array} \right\} \text{Ecuaciones de } S$$

• Resuelva el sistema (compatible Indeterminado)

• 2 ecuaciones, 3 incógnitas $\rightarrow 3 - 2 = 1$ Parámetro.

$$\begin{array}{l} x = t_1 \\ y = t_2 \\ z = t_3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1, 1, 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Sean $v_1 = (1, 4, -5, 2)$ $v_2 = (1, 2, -3, 1)$ $v_3 = (3, 2, x, y)$; $\mathbb{R}^4$

b) Encontrar la ecuación de dicho subespacio.

Base subespacio $\{v_1, v_2\}$

$$\dim S = 2$$

$$U = \mathbb{R}^4 \rightarrow \dim U = 4$$

$$\dim S = \dim U - n^{\circ} \text{ ecuaciones}$$

$$2 = 4 - x$$

$$x = 4 - 2 = \boxed{x = 2}$$

$$\text{Rg}(v_1, v_2, w) = \text{Rg} 2$$

• Todos los menores de Orden 3 = 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ -5 & -3 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \begin{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ -5 & -3 & z \end{matrix} \right| = 0 \\ \left| \begin{matrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ 2 & 1 & t \end{matrix} \right| = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ -5 & -3 & z \end{vmatrix} = 2z - 12x - 5y + 10x + 3y - 4z = 0$$

$$\boxed{-2 - 2y - 2z = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 2t + 2y + 4x - 4x - y - 4t = 0$$

$$\boxed{y - 2t = 0}$$

$$1) S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = k+1; k^2x+y+z = 0\}$$

• El vector 0 tiene que estar para q sea un subespacio

$$\begin{cases} 0 = k+1 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{k = -1}$$

• $\dim(S) = \dim(V) - n^{\circ} \text{ ecuaciones}$

$$2 = 3 - 1$$

• Calcular una base si $x+y+z = 0$. Necesito dos vectores porque la $\dim S$ es 2. Entonces se resuelve el sistema.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ y=h & \quad z=\alpha & x+h+\alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -h - \alpha \\ y = h \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \alpha(-1) + h(-1) \\ y &= h \\ z &= \alpha \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \{(1, 1, 0) (-1, 0, 1)\}$$

2. b)

$$v_1 = (1, 2, 3, 1)$$

$$v_2 = (3, 1, 2, 3)$$

$$\dim S = \dim(V) - n^{\circ} \text{ ecuaciones}$$

$$2 = 4 - 2$$

• Buscar 2 ecuaciones:

- Yo sé que v_1, v_2 son l.t., Entonces si meto un vector más (v_1, v_2, v_3) serán l.d. Entonces cualquier $\dim 3 = 0$

$$\Delta \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \begin{cases} \text{El Rang}(\Delta) = 2 \text{ si sólo si todos los} \\ \text{menores de orden } 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z + 9y + 4x - 3x - 2y - 6z = 0$$

$$x + 7y - 5z = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4t + z + 9y - 2y - 3t - 6z = 0$$

$$7y - 5z + t = 0$$

$$S = \begin{cases} x + 7y - 5z = 0 \\ 7y - 5z + t = 0 \end{cases}$$

3. Halle la dim y una B_S por el sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$

$$\dim(S) = \dim(V) - n^{\circ} \text{ ecu}$$

$$|1| = 3 - 2$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \begin{cases} y = h \\ x = -h \\ z = 2h \end{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \{(-1, 1, 2)\}$$

12. Dado el sistema Generador $\{(2, 1, 0, 1), (a, 0, 1, -1), (1, 1, -1, 1)\}$

• Halle la dimensión del sub espacio generado por estos vectores según los valores del parámetro "a"

• Halle las ecuaciones para $a=1$ y $a=0$

$$\Delta \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 2 + a = -1 + a \end{cases}$$

• Si $-1 + a = 0 \Rightarrow$ Según sistema

• Si $-1 + a \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(\Delta) = 3$

Si $a \neq 1$ el $\text{Rango}(\Delta) = 3$ Entonces son 3 vectores y $\text{Dim} = 3$

Si $a = 1$ el $\text{Rg}(\Delta) = 2$. Porq $F_1 = F_2 + F_3$ entonces son L.D.

$$B_S = (2, 1, 0, 1) (1, 0, 1, -1)$$

$$\text{Dim}(S) = \text{Dim}(V) - n^{\circ} \text{ ecuacion}$$

$$2 = 4 - \boxed{2}$$

$(v_1, v_2, w) \rightarrow \text{L.D} \rightarrow \text{Rg}(\Delta) = 2 \rightarrow$ todos los Im de $\text{Ord } 3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix} \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = x - z - 2y \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} = -x - t + 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z - 2y = 0 \\ -x - t + 3y = 0 \end{cases}$$

PARA $\boxed{a=0}$

$$B_S = \{ (2, 1, 0, 1) (0, 0, 1, -1) (1, 1, -1, 2) \}$$

$$\text{Dim}(S) = \text{Dim}(V) - n^{\circ} \text{ ecuacion}$$

$$3 = 4 - \boxed{1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z \\ 1 & -1 & 2 & t \end{pmatrix} = \text{Rg}(\Delta) < 3$$

* todos los menores de $\text{Ord } 4 = 0$

$$\downarrow$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z \\ 1 & -1 & 2 & t \end{vmatrix} = 0$$

* Si todos los $\text{Im } 3 = 0 \Rightarrow \text{Rg}(\Delta) = 4$

Si todos los $\text{Im } 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(\Delta) = 3$

$$f(\bar{x}) = A(\bar{x})$$

$$E: f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 - 2x_2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_1) : \Delta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x}} \rightarrow \text{Autovector}$$

Autovector.

Sea $\bar{x}$ ~~autovector~~ autovector con λ autovalor asociado; significa que $f(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x}$ y esta función a su vez en $f(x)$ es un polinomio lineal es igual a $A \cdot \bar{x}$

$$A \cdot \bar{x} = f(x) = \lambda \cdot \bar{x} \Rightarrow A\bar{x} = \lambda\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

$$\Rightarrow A\bar{x} - \lambda\bar{x} = 0 \Rightarrow (A - \lambda \cdot I)\bar{x} = \vec{0}$$

↳ MATRIZ IDENTIDAD.

$\Rightarrow$ Se ha convertido en un "sistema de ecuaciones lineal homogéneo"

Estos sistemas siempre tienen solución pero $\bar{x}$ es ~~distinto~~ distinto de "0".

Así que tiene infinitas soluciones $\Rightarrow$ El rango de $(A - \lambda \cdot I)$ tiene que ser menor al número de las incógnitas. $\boxed{\text{rang}(A - \lambda \cdot I) \geq n}$

$$\boxed{E | \det A - (\lambda \cdot I) = 0}$$

* CÁLCULO DE AUTOVALORES:

1) RESTAR λ en la diagonal ^{Principal} ~~Paralela~~ A

2) Hacemos el determinante $\rightarrow$ (Sale un polinomio en λ que se llama "polinomio característico")

3) Lo resolvemos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación y esa ecuación que sale se llama "característica"

Ej. Págy. Diagonalización Ej. 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) - \lambda(2-\lambda)^2 + \lambda + (2-\lambda) + (2-\lambda) = -2 - 7(4-4\lambda+7\lambda^2) + 4 - \lambda = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

①

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 4 & -5 & 2 \\
 2 & & -2 & 1 & -2 \\
 \hline
 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
 1 & & -1 & 1 & \\
 \hline
 & -1 & -1 & 0 & \\
 1 & & -1 & & \\
 \hline
 & -1 & 0 & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 2 \\
 \lambda_2 &= 1
 \end{aligned}$$

Calculo de Autovalores.

Para calcular los autovalores habrá que resolver para cada λ la ecuación (el sistema de ecuaciones).

$$(\Delta - \lambda I) \vec{x} = 0 \rightarrow \text{infinitas soluciones.}$$

• ~~Propiedades~~ Las infinitas soluciones ~~se~~ forman un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$.

La traza de la matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal.

• Si Δ es triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal.
• Si la matriz es diagonal los ~~elementos~~ ^{autovalores} son los elementos de la Diagonal Principal.

• Si el $\det(\Delta) = 0$ ^{al menos} uno de los autovalores es "0".

• Teorema de la existencia de la matriz semejante.

La función f es diagonalizable.

f es diagonalizable $\Leftrightarrow$ existe una base de ~~los~~ autovalores.

Si f es diagonalizable entonces $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$
 Si diagonal Principal $\rightarrow$ ~~es~~ formada x

y P son los autovalores asociados en cada λ

$$P = \left[\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \dots, \frac{1}{v_n} \right] \rightarrow \text{Base de autovalores a } \lambda$$

Para la práctica.

1) Calcular los autovalores de A

~~2) Calcular las dimensiones de cada subespacio asociado a los autovalores~~
si Σ

2) Calcular $\dim(L(\lambda_i)) = n - \text{rg}(A - \lambda_i I)$

3) Sumo todo lo que me da y si

• El resultado es > 3 es diago

• El resultado es < 3 no es diago

Porque así siempre el Rag de la A es 3

~~3~~

4) Si es diagonalizable, se calcula la base de $L(\lambda_i)$ ~~resolviendo~~ el sistema $(A - \lambda_i I) \bar{x} = \vec{0}$ como hicimos en el tema de subespacios

Seguimos Ej 1.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Paso 1 (ya hecho) = $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ (doble)
 $n=3$

2) * $\lambda_1 = 2 : \dim(L(\lambda_1)) = 3 - \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= 3 - 2 = \boxed{1} \rightarrow 1$ ~~autovalor~~ autovalor en la base

Este determ tiene que ser 0 porque en el paso anterior no cogia que el det es 0 y $\lambda = 2$.

R. $\lambda_2 = 1 : \dim(L(\lambda_2)) = 3 - \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0$

$= 3 - \boxed{1} = \boxed{2} \rightarrow 2$ autovalores en la base
Rag me coincide con el autovalor.
Siempre

• comprobación

$\dim(L(\lambda_1)) + \dim(L(\lambda_2)) = 1 + 2 = \boxed{3 = n}$

$\Rightarrow$ Si es diagonalizable

• Como sólo me pide el vector. Calculo el de la base $\lambda_1 = 2$

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• nos quedamos con el λ que hemos utilizado para el rango de tal manera que nos quedamos con los iguales que sí y la otra se pasa al otro lado.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = z \\ -x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x = -z} \\ \text{Pongo el valor de la base} \\ 2z + y = z \Rightarrow \boxed{y = -z} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \quad \boxed{B = \{(-1, -1, 1)\}} \quad \text{Autovector asociado a } \lambda.$$

2) Dada la aplicación Lin $f(x, y, z) = (2x + 2y + z, x + 3y + z, x + 2y + z)$

Cuya matriz es A , encuentre una matriz diagonalizable semejante a A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + (3-\lambda) + 2 + 2 - (3-\lambda) \\ &\quad - 2 - (2 - (2-\lambda)) = \\ &\Rightarrow (2-\lambda)^2 + (3-\lambda) + 2(-3+\lambda) - [2 \cdot (2-\lambda)] \\ &= (2-\lambda)^2 + 2 - 4 + 2\lambda = (2-\lambda)^2 - 2 + 2\lambda \\ &= 4 - \lambda^2 - 2 + 2\lambda = \boxed{-\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0} \\ &= 2 + 2 + (2-\lambda)^2(3-\lambda) - 2(2-\lambda) - \\ &\quad - 2(2-\lambda) - (3-\lambda) = 4(4 - 4\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) \\ &\quad - 4 + 2\lambda - 3 + \lambda = \\ &= 4 + 12 - 4\lambda - 12\lambda + 4\lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 \\ &\quad - 11 + 5\lambda = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 \Rightarrow \\ &\quad \boxed{-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 2 & -11 & 5 \\
 \hline
 1 & & -1 & 6 & -5 \\
 \hline
 & -1 & 6 & -5 & 0 \\
 \\
 & & + & +5 & \\
 \hline
 1 & & -1 & +5 & 0 \\
 \\
 & & & -5 & \\
 \hline
 5 & & -1 & & 0
 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ (double)}$$

$$\lambda_2 = 5$$

$$* \lambda_1 = 1$$

$$n - \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = \boxed{2}$$

$$2 + 1 = 3$$



SR is diagonalizable.

$$* \lambda_2 = 5$$

$$n - \text{rg} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 2 = \boxed{1}$$

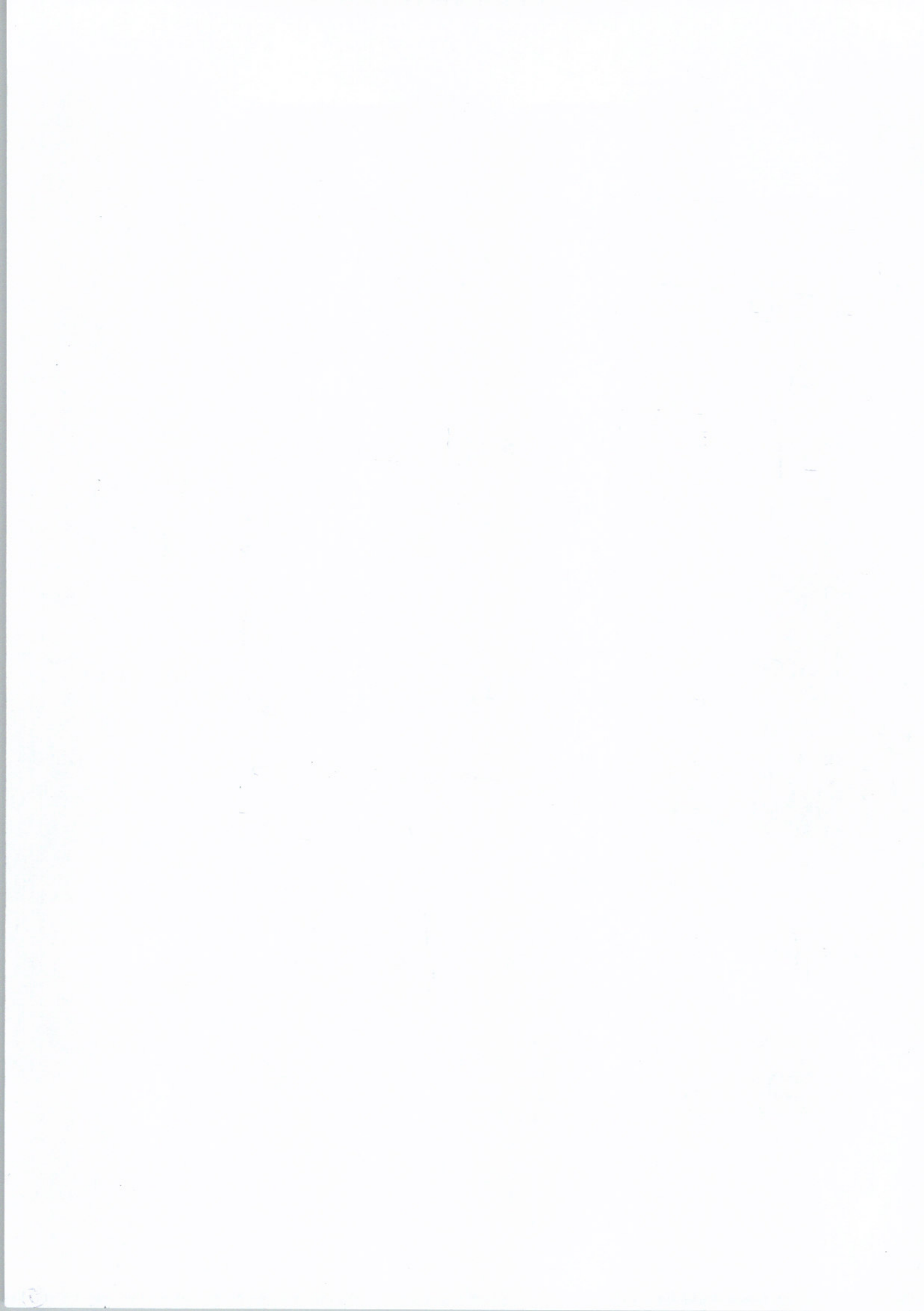
$$* \lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x &= -2y - z \end{aligned}$$

$$B = \{(-2, 1, 0), (-1, 0, -1)\}$$

$$\begin{cases} x = -2\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

* HÖCKER d 5 y el 14.



$$5) \{ x_1 = a ; x_2 = a+b ; x_3 = c ; x_4 = b \} = S$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rango} = 3$$

↳ son los 3 LI

$$B_S = \{ (1, 1, 0, 0) (0, 1, 0, 1) (0, 0, 1, 0) \}$$

$$b) (a, a+b, c, b) = (1, 2, 0, 1)$$

$$\begin{cases} 1 = a \Rightarrow \boxed{a=1} \\ 2 = a+b ; 1+1=2 \Rightarrow \boxed{b=1} \\ 0 = c ; \boxed{c=0} \\ 1 = b ; \boxed{b=1} \end{cases}$$

* Si esta ecuación no coincidiera, sería que este vector no se encuentra dentro de la subespacio.

$$6) \text{ Obtener una base de } \mathbb{R}^4 \rightarrow 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$-2x_1 + 3x_3 = x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = -2\beta + 3\lambda \end{cases}$$

Para $\beta = 1$:

$$x_1 = (1, 0, 0, -2)$$

Para $\alpha = 1$:

$$x_2 = (0, 1, 0, 0)$$

Para $\lambda = 1$:

$$x_3 = (0, 0, 1, 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \neq 0 \begin{cases} \text{Rango} = 3 \\ \text{Linealmente indep} \end{cases}$$

$$B_S = \{ (1, 0, 0, -2) (0, 1, 0, 0) (0, 0, 1, 3) \}$$

$$7) \{ (0, -1, 2, -1) (a, -1, 0, 1) (1, -1, b, 0) \}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2a + 2 + a \cdot 1 = -2a + 2 + a = -a + 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\text{Dim}_S = \text{Rg}(\Delta) = 2 \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = b - 2 + b = 2b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

* Si $a=2$ y $b=1$ la matriz es
o sea q $\text{Rg} = 2$

$$\text{Dim } S = \text{Dim } V - \text{n}^{\circ} \text{ ecuaciones}$$

$$2 = 4 - x \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & x \\ -1 & -1 & y \\ 2 & 0 & z \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ -1 & -1 & y \\ 2 & 0 & z \end{vmatrix} = \boxed{4y + 2x + 2z = 0}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & y \\ 2 & 0 & z \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix} = z + 2y + 2t + z = \boxed{2y + 2z + 2t = 0}$$

9) Dim, Base y ecuaciones de $\{(x_3 + x_2, x_2, x_3, 2x_3)\}$ $x_3 = a$
 $x_2 = b$

$$S = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x = a+b, y = a, z = b, t = 2b)$$

$$\begin{aligned} x &= a+b \\ y &= a \\ z &= b \\ t &= 2b \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Rg}(\Delta) = 2$$

$$B(\Delta, 1, 1, 0, 0) \quad (1, 0, 1, 2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x, y, z = 0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 2 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{2x - 2y - t = 0}$$

$$8) \begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + ay - 2z = b \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$

• Dimensión 2 $\rightarrow$ Calcular a, b

$b=0$ $\rightarrow$ Porque los subespacio $= 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\dim S = 3 - \text{rg}(A)$$

$$3 - \text{rg}(A) = 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

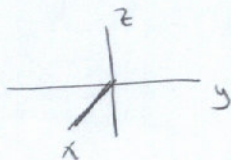
$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Solución = $a = 1$ Para que se me anulen los 2 a la vez

11)

a) si pero forman el mismo espacio vectorial.



así se representa (x, y, z)

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/5 \\ -5 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/5 \end{bmatrix} = \text{rg}(A)$$

$$F_1 + F_2 = 5F_4 \Rightarrow \text{así que } \text{rg}(A) = 2$$

$$B_S \{ (1, -5, 0), (0, 0, 1) \}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -5 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{-5x - y = 0}$$

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= -5\alpha \\ z &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= 1 \end{aligned}$$

$$(1, 5, 0) + (0, 0, 1) = (1, 5, 1)$$

5) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2b & 3 \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$, calcule a y b

para que sea diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2b & 3 \end{bmatrix} \quad \# \text{ como es triangular} = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = a, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3}$$

↓
Esto no hace falta ya es triangular

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2b & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

LA PROPIEDAD 2 (PÁGINA 8) Implica la siguiente proposición:

Proposición: Si los autovalores de A son distintos, la matriz es diagonalizable

↑
ARUNTAZ DONDE LOS ARUNTES

Si $a \neq -1$ y $a \neq 3 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow A$ es diagonalizable.

* si $a = -1$

$$\lambda_1 = -1 \text{ (doble)}, \lambda_2 = 3$$

$$\dim(\mathcal{L}(\lambda_1)) + \dim(\mathcal{L}(\lambda_2)) = 3?$$

$$\mathcal{L}(\lambda_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2b & 3-\lambda \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Sustituyendo} \\ a = -1 \end{matrix}$$

$$\dim(\mathcal{L}(\lambda_1)) = 3 - \text{rg} = 3 - 2 = 1$$

$$\mathcal{L}(\lambda_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim(\mathcal{L}(\lambda_1)) + \dim(\mathcal{L}(\lambda_2))$
↑
En este caso necesito det, si no es 0 $\Rightarrow$ Falso

$$\dim(\mathcal{L}(\lambda_2)) = 3 - \text{rg} = 3 - 2 = 1$$

$$\dim(\mathcal{L}(\lambda_1)) + \dim(\mathcal{L}(\lambda_2)) = 1 + 1 = 2 \neq 3 \quad \text{No diagonalizable}$$

Continuación 5)

* Si $a = 3$ $\lambda_1 = 3$ (doble) $\lambda_2 = -1$

$$\text{rg}(\Lambda - \lambda_1 I) = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{Si } b=0 \\ 2 & \text{Si } b \neq 0 \end{cases}$$

$\downarrow$ $\uparrow$
 $\Lambda - \lambda_1 I$ $\Lambda - \lambda_2 I$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2b \end{vmatrix}$$

* Si $a = 3$ y $b \neq 0 \Rightarrow$ Diagonalizable

* Si $a = 3$ y $b = 0 \Rightarrow$ No diagonalizable

* Si $a \neq -1, 3 \Rightarrow$ son diferentes $\lambda \Rightarrow$ Diagonalizable

3 opciones

14) ~~Dada la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x - y, 2x, 2y + z)$~~

14) Dada la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

A) Demuestra si $\lambda = -1$ es un autovalor a dicha aplicación.

B) Halla una base del subespacio de ~~autovalores~~ autoespacios asociados a dicho autovalor

A) $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow \boxed{|\Lambda - \lambda I| = 0}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Si } \lambda = -1 \text{ es autovalor de } \Lambda$$

B) $\mathcal{L}(\lambda) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -z \\ -2x - 4y = 7z \\ x + 2y = -3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 5z \\ \Rightarrow y = -5z \end{cases}$$

multiplico $x - 2$ y
me quito x al restar arriba

$$x = -2y - 3z = 10z - 3z = \boxed{7z}$$

$$\begin{cases} y = 7x \\ y = 5x \\ z = x \end{cases}$$

$$B = \{ (7, -5, 1) \}$$

TEORÍA

Calcular la potencia (n) de una matriz (A)

$$(A^n)$$

Pero si A es diagonalizable, $A = PDP^{-1}$

$$A^2 = A \cdot A = P \cancel{D} P^{-1} \cdot \cancel{P} D P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = P \cdot D^2 \cdot P^{-1} \cdot \cancel{P} D P^{-1} = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$\boxed{A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}}$$

↪ si hay que sacar el producto.

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9)

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Estudie si es diagonalizable y si lo es obtenga la matriz de Paso (P) que la diagonaliza y calcule A^{30} .

• Como A es triangular, los valores son los de la diagonal y como son diferentes SÍ es diagonalizable.

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 3$$

distintos
↓
diagonalizable

continuous a)

$$* \lambda = 2$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 0 \rightarrow \boxed{y=0} \\ z = 0 \rightarrow \boxed{z=0} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad B = \{(1, 0, 0)\}$$

$$* \lambda_2 = 1$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \Rightarrow \boxed{x=y} \\ 2z = 0 \rightarrow \boxed{z=0} \end{cases} \quad \begin{cases} x = y = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \quad B = \{(1, 1, 0)\}$$

$$* \lambda_3 = 3 \quad (A - \lambda_3 I) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y + 3z = 0 \Rightarrow -y + 3z = x \Rightarrow -y + 3y = x \Rightarrow \boxed{2y = x} \\ -2y + 2z = 0 \rightarrow \cancel{2}y = \cancel{2}z \Rightarrow \boxed{y=z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad B = \{(2, 1, 1)\} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{30} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{30} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{30} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 P Δ^{30} P^{-1}

OBSERVACIONES IMPORTANTES - RECORDARNO; PRACTICO.

2º Si la matriz es triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal.

3º Si los elementos (Autovalores) son distintos $\Rightarrow A$ diagonalizable.

4º Si A es simétrica ($A = A^t$) $\Rightarrow A$ es diagonalizable.

- Autovalores siempre distintos al vector 0 y nunca iguales o proporcionales entre sí.
- Si la matriz no es invertida y sale algún autovalor doble hay que mirar si es diagonalizable.

12) Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & a & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & c & -2 \end{bmatrix}$ de la que se sabe que tiene $\lambda_1 = 1$ como autovalor. y $v(0, -2, 2)$ como vector propio.

a) Calcular los valores a, b, c

b) Hacer si es posible la matriz diagonalizable semejante para los valores obtenidos en el apartado anterior.

12)
$$\begin{bmatrix} -1 & a & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & c & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a=2} \\ -2b = -2 \Rightarrow \boxed{b=1} \\ -2c - 4 = 2 \Rightarrow \boxed{c=-3} \end{cases}$$

8. Dada la aplicación lineal $f(x, y, z) = (ay + z, 4z, z)$, justifique rigurosamente si existe algún valor de a para que sea diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{como es triangular, sus autovalores son los de la diagonal principal.}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ (doble)} \quad \lambda_2 = 1$$

$$\begin{aligned} \dim(L(\lambda_1)) + \dim(L(\lambda_2)) &= 3 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ 3 - \text{rg}(A - \lambda_1 I) + 3 - \text{rg}(A - \lambda_2 I) \end{aligned}$$

* $\text{rg}(A - \lambda_1 I) =$ como es multiplicar por "0" se queda la matriz original.

$$\text{rg} \left[\begin{array}{c|cc} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{a = 4}$$

$$\begin{cases} \text{Si } a = 0 \text{ el rango} = 1 \\ \text{Si } a \neq 0 \text{ el rango} = 2 \end{cases}$$

$$\text{rg}(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

• OPCIONES.

$$\begin{aligned} \text{Si } a = 0 \\ \left. \begin{aligned} \dim(L(\lambda_1)) &= 3 - 1 = 2 \\ \dim(L(\lambda_2)) &= 3 - 2 = 1 \end{aligned} \right\} 2 + 1 = 3 \Rightarrow \text{DIAGONIZABLE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } a \neq 0 \\ \left. \begin{aligned} \dim(L(\lambda_1)) &= 3 - 2 = 1 \\ \dim(L(\lambda_2)) &= 3 - 2 = 1 \end{aligned} \right\} 1 + 1 = 2 \Rightarrow \text{NO DIAGONIZABLE} \end{aligned}$$

33.

a) Estudie si la ap. lineal es $f(x, y, z) = (2x - z, -y, 2x + 2y - z)$ tiene

a $\lambda = 0$ como autovalor como autovector asociado $v = (1, 0, 2)$

• PARA ESTO APlico LA FORMULA $f(v) = \lambda v$

$$f(1, 0, 2) = (2 \cdot 1 - 2, -0, 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2) = (0, 0, 0)$$

$$= \boxed{0 \cdot (1, 0, 2)} \rightarrow \text{SÍ es autovalor } 0 \text{ y autovector } (1, 0, 2)$$

b) Averigue si la aplicación del operador es diagonalizable y, en tal caso, diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

TERMINAR ESTE EJERCICIO

Def.:

se define como forma cuadrática la aplicación que asigna a cada vector $x \in V$.

Es un polinomio de grado 2.

$$Q(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + yz - z^2$$

Esto también es un grado 2

y como el grado de x y el

de y ; $1+1=2$.

o MATRIZ. como matriz.

$$(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x & -1/2 & 0 \\ y & -1/2 & 0 \\ z & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

LA DIAGONAL PRINCIPAL SON LOS NÚMEROS ELEVADOS AL CUADRADO.

EL RESTO SE COLOCA POR

(x, x) (x, y) ... y como son

homos sin estar elevados

al cuadrado, se divide entre 2

o PASAR DE MATRIZ A ECUACIÓN.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q(x, y, z) = 1 \cdot x^2 + 8xy - 2xz + 0y^2 + 0yz + 2z^2$$

$$Ej: Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

CLASIFICACIÓN DE LAS CUADRÁTICAS

• POSITIVA. Siempre $\geq$ positivo

• SEMIDEFINIDA POSITIVA. Siempre Positiva excepto alguna vez 0

• NEGATIVA. Siempre negativa

• SEMIDEFINIDA NEGATIVA. Siempre negativa excepto en alguna vez $\neq$ 0

• INDEFINIDA. Ninguna de las anteriores.

¿Cómo saberlo?

Si todos los Δ_n son mayores $\geq$ 0 es positiva.

Si ~~todos~~ alternan el signo. Pares +, ~~Impares~~ Impares - $\Rightarrow$ Negativa

Si todos son mayores $\geq$ 0 menos el último que es cero. $\Rightarrow$ Semide Positiva

Si ~~todos~~ alternan el signo Pares +, Impares - $\Rightarrow$ Semide Negativa

Si todos son distintos $\neq$ 0 y Δ_n no es definida = INDEFINIDA.

Si todos son distintos $\neq$ 0 y Δ_n no es semidefinida. $\Rightarrow$ ~~es~~ INDEFINIDA

Los menores Principales con los que se hace son:

$$\begin{array}{l} 1^\circ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ 2^\circ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ 3^\circ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Ej.
$$\begin{bmatrix} \Delta & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1^\circ \Delta_1 = \Delta > 0$$

$$\Delta_2 = 2^\circ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Delta & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 1/4 < 0$$

$$\Delta_3 = 3^\circ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \Delta & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -4 + \frac{5}{4} < 0$$

INDEFINIDA

2. Considera su forma cuadrática. $Q(x, y, z) = x^2 + 2z^2 + 4xy + 3xz + 8yz$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3/2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3/2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= -1 < 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \\ \Delta_3 &= \Delta = 12 + 12 + 16 - 8 > 0 \end{aligned}$$

• NO ALTERA SU SIGNO.
• NO TODOS SON POSITIVOS O NEGATIVOS. | INDEFINIDA.

• $Q(x, y, z) = -x^2 - 5y^2 - z^2 + 4xy$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= -1 < 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0 \\ \Delta_3 &= |\Delta| = -1 < 0 \end{aligned}$$

• Como Alterna Positivo + negativo - es SEMIDEFINIDA NEGATIVA

• Método de los autovalores. PARA ESTUDIAR EL SIGNO.

• Se calcula los autovalores de la matriz.

→ La matriz siempre va a ser diagonalizable porque es simétrica.

• Se mira su signo:

→ todos los AUTV POSITIVOS : DEF POSITIVA

→ todos los AUTV NEGATIVOS : DEF NEGATIVA

→ todos los AUTV SON MENORES O IGUAL A CERO HAY UNO QUE SEA 0 = ^{SEMPRE} _{NEUTRO}

→ todos mayores o iguales a cero algunos pueden ser 0 = SEMIDEF ^{POSITIVA}

→ unos autovalores ≥ 0 y otros ≤ 0 = INDEFINIDA.

Ej: $Q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$

INDEFINIDA.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ \Delta_3 &= |\Delta| = 2 > 0 \end{aligned}$$

No me resiste → saco autovalores.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 2 - \lambda^3 + 3\lambda = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ & & +1 & -1 & -2 \\ \hline -1 & & -1 & +1 & 2 & 0 \\ & & & 1 & -2 \\ \hline -2 & & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

1. Estudie, según los valores de a , el signo de la forma cuadrática siguiente.

$$Q(x, y, z) = ax^2 + y^2 + z^2 + 2yz$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = a$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

$$\Delta_3 = |\Delta| = a - a = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } a > 0 \quad \text{SEMIDEF POSITIVA} \\ \Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 = 0 \\ \\ \text{Si } a < 0 \quad \text{SI INDEFINIDA} \\ \Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 < 0 \quad \Delta_3 = 0 \\ \\ \text{Si } a = 0 \\ \Delta_1 = 0 \quad \Delta_2 = 0 \quad \Delta_3 = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{array} \right| = -\lambda(1-\lambda)^2 + \lambda = 0 \end{array} \right.$$

$$\lambda(-\lambda(1-\lambda)^2 + 1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \\ -1 + 2\lambda + \lambda^2 - \lambda = 0 \\ \lambda(2+\lambda) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0} \quad \boxed{\lambda_3 = +2}$$

SEMIDEFINIDA POSITIVA

T.4. CÁLCULO DIFERENCIAL.

□ MAGNITUDES VALORADAS POR UNA FUNCIÓN.

$$\boxed{\text{Derivada} = \text{Variación}}$$

• Funciones Reales de variables Reales $\rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

• Funciones Reales de "n" variables $\rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Ej: Una empresa tiene 3 productos que tiene un beneficio de 10 con A, de 4 con B y 7 con C si los consumos x_1, x_2, x_3 .

$$B(5, 2, 4) = 10 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 50 + 8 + 28 = 86.$$

• Forma explícita: Las variables están despejadas. $y = x^2$

• Forma Implícita: Las variables no están despejadas: $x^2 + y^2 = 4$

• Ecuación de la circunferencia:
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Domio: Son las "x" para las que existe función; $y = \sqrt{x} \Rightarrow D(f) \in [0, +\infty)$

$y = \ln(x+y)$
 $D(f) \in \mathbb{R}$
 $(x,y) \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y) \geq 1$

Variación de f cuando pasamos "a" a "a+h"

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - (a)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

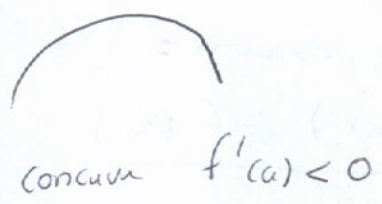
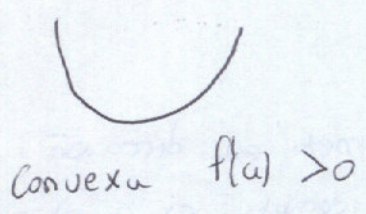
□ LA VARIACIÓN INSTANTÁNEA ES LA DERIVADA.

• Escríben la tabla de derivadas $\rightarrow$ Las trigonométricas NO

Si $f'(a) > 0 \Rightarrow$ creciente

Si $f'(a) < 0 \Rightarrow$ decreciente.

Si quieres a derivar la $f'(a)$ tengo la segunda derivada.



* tendencia local: Acelera o Decelera.

~~Si $f''(a) > 0$ entonces la función está acelerando.~~

$$f' > 0 \begin{cases} f'' > 0 & \text{creciente acelerada} \quad \cup \rightarrow \cup \\ f'' < 0 & \text{creciente decelerada} \quad \cap \rightarrow \cap \end{cases}$$

$$f' < 0 \begin{cases} f'' > 0 & \text{decreciente acelerada} \rightarrow \cup \rightarrow \cup \\ f'' < 0 & \text{decreciente decelerada} \rightarrow \cap \rightarrow \cap \end{cases}$$

Ej: $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$

$$f'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 0 \Rightarrow 9x^2 - 4x$$

$$f(x) = e^{x^3+2}$$

$$f'(x) = e^{x^3+2} \cdot 3x^2$$

$$f(x) = \frac{x+5}{3x^2} = \frac{1 \cdot (3x^2 - 5) - 6x(x+5)}{(3x^2 - 2)^2}$$

$$f(x) = (3x-5)^3 \cdot \ln(2x)$$

$$f'(x) = 3(3x-5) \cdot \ln(2x) + (3x-5)^3 \cdot \frac{2}{2x}$$

* SW explicación NO EXAMEN:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x}$$

$$f'(\vec{a}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + x \cdot \vec{v}) - f(\vec{a})}{x}$$

¿Cuánto más esa dirección en una derivada es la derivada direccional.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a \rightarrow a + x$$

$$\vec{a} \rightarrow \vec{a} + x \vec{v}$$

* Necesario dar una dirección por moverse de punto a punto del espacio.

Tomamos los vectores de la Base canónica, de $\mathbb{R}^n$

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\bar{a} + \lambda \bar{e}_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (\lambda, 0, \dots, 0)$$

$$= (\boxed{a + \lambda}, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$\uparrow$
 x_1
El límite sólo afecta al principio, es decir, dando con λ .

Derivamos f tomando x_1 como la única variable y $x_2, \dots, x_n$ como constantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \rightarrow \text{DERIVADA PARCIAL.}$$

$$f: f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = 6x_1 + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = 0 + 2$$

$$f(x, y) = e^{x^2} + 3y^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2} \cdot 2x + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 + 15y^4$$

$$f(x, y) = -2x^3 + \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6 + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{1}{y}$$

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 2y + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 - 2x + 15y^2$$

Ejercicios.

$$1) f(x, y, z) = x^3 - 2xy^2 + 3xz - y^3 + 2z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2 + 3z \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xy - 3y^2 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x + 4z \quad \checkmark$$

$$2) f(x, y) = e^{2xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2xy} \cdot 2y \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2xy} \cdot 2x \quad \checkmark$$

$$3) f(x, y) = \frac{2x-1}{y+3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2 \cdot (y+3) - 0(2x-1)}{(y+3)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{0(y+3) - 1(2x-1)}{(y+3)^2}$$

VECTOR GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN (∇)

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\bar{x}) \right)$$

$$\nabla f(x, y) = (e^{2xy} \cdot 2y, e^{2xy} \cdot 2x)$$

$$\nabla f(1, 0) = e^{2 \cdot 1 \cdot 0} \cdot 2 \cdot 0, e^{2 \cdot 1 \cdot 0} \cdot 2 \cdot 1 = (0, 2)$$

Comprobar los siguientes resultados.

a) $\nabla f(1,1,1) = (2, -7, -1)$ siendo $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 - 3x_1x_2^2 - x_1x_2x_3$

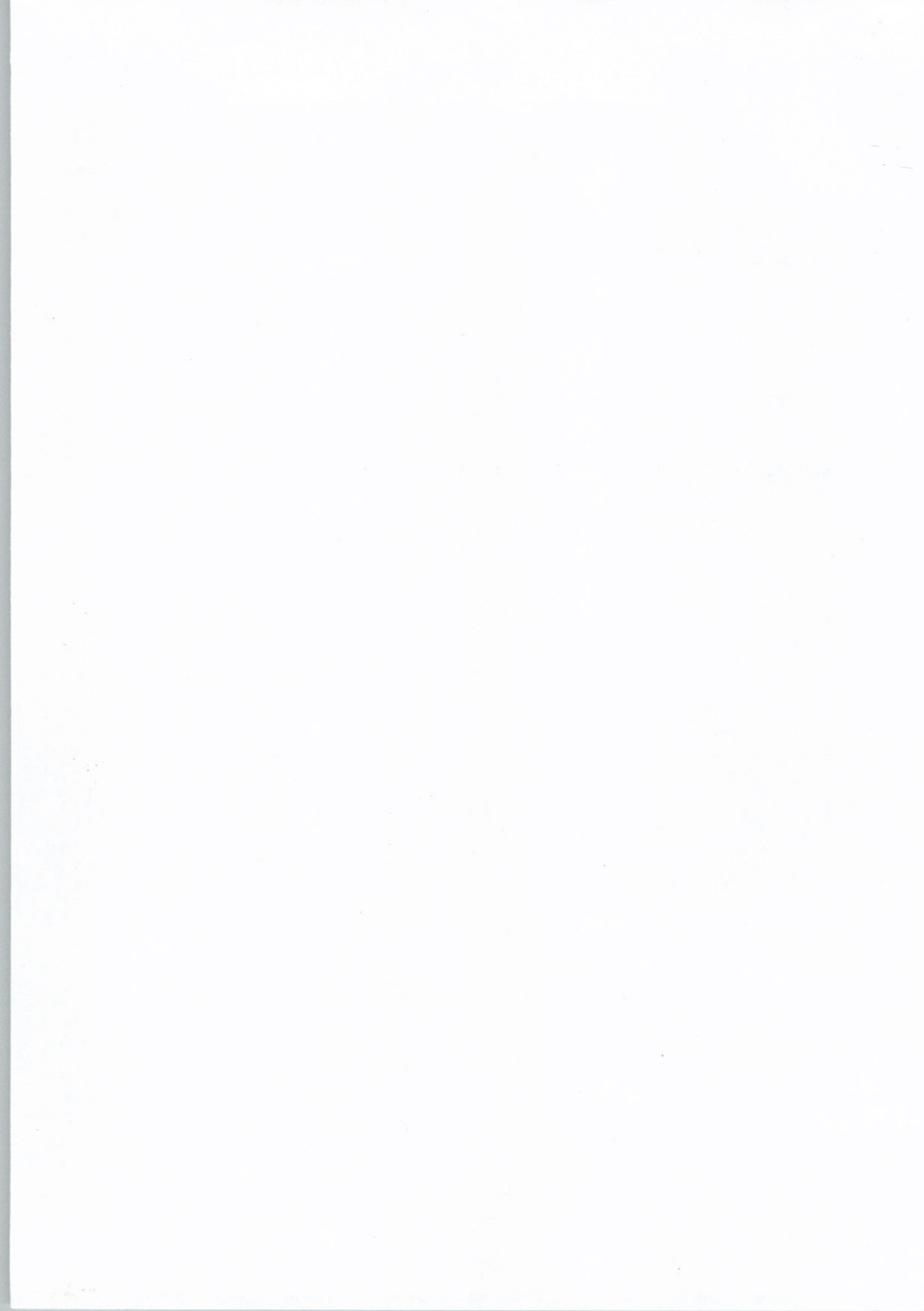
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 3x_2^2 - x_2x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 - 6x_1x_2 - x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 - 0 - x_1 - x_2$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (6x_1^2 - 3x_2^2 - x_2x_3), (-6x_1x_2 - x_1 - x_3), (-x_1 - x_2)$$

$$\nabla f(1,1,1) = (6, -7, -2)$$



$$\int f(x) f'(x) dx = \frac{f(x)^2}{2} + C$$

$$\int f(x)^n f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Poner en la tabla.

$$\int a^b = b \cdot \ln a$$

1) $\int \ln(x^2) dx$

$$u = \ln(x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$dv = 1 \rightarrow v = \int 1 dx = x$$

2) $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$

$$\int \ln \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln(x^{1/2}) \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{2} \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

6) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

$$\int e^{-x^2} \cdot x^3 dx = \int \underbrace{(e^{-x^2} \cdot x)}_u \cdot \underbrace{x^2}_{dv} dx$$

$$v = x^2 \rightarrow dv = 2x \rightarrow \text{Siempre elegir un número exponencial}$$

$$dv = e^{-x^2} \cdot x \rightarrow v = \frac{1}{-2} \int e^{-x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{-2} e^{-x^2}$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{-2} e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int e^{-x^2} \cdot 2x dx = \boxed{x^2 \frac{1}{-2} e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + C}$$

10) $\int \ln(2x-1) dx$ Siempre que haya una función como $\ln$ o $\exp$ lo multiplicamos por 1.

$$u = \ln(2x-1) \rightarrow du = \frac{2}{2x-1}$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$dv = 1 \rightarrow v = \int 1 dx = x$$

$$\int \ln(2x-1) = \ln(2x-1) \cdot x - \int x \cdot \frac{2}{2x-1}$$

$$11) \int (x^2 + x - 1) e^x dx$$

$$u = x^2 + x - 1 \longrightarrow du = 2x + 1$$

$$dv = e^x \longrightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int (x^2 + x - 1) e^x dx = (x^2 + x - 1) \cdot e^x - \int e^x (2x + 1) dx =$$

$$u = 2x + 1 \longrightarrow du = 2$$

$$dv = e^x \longrightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$= (x^2 + x - 1) e^x - [(2x + 1) e^x - \int e^x 2 dx] =$$

$$= \boxed{(x^2 + x - 1) e^x - [(2x + 1) e^x - 2 e^x] + C}$$

* Integración de Funciones Racionales.

El grado de P tiene que ser SIEMPRE menor a Q

• Si $P < Q$ se resuelve $\frac{P(x)}{Q(x)}$

• Si $P \geq Q$ se resuelve dividiendo, por la parte de la división

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Cociente}} + \frac{\overset{\text{resto}}{R(x)}}{Q(x)} = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Integral inmediata.

Ejemplo. Servirá para terminar el ejercicio anterior.

$$\int \frac{2x}{2x-1} dx = \int 1 dx + \frac{1}{2} \int \frac{1 \cdot 2}{2x-1} dx = \boxed{x + \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C}$$

Descomposición en suma de factores simples.

1) $Q(x)$ tiene raíces reales simples: $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c) =$

$$\text{Ej } \int \frac{x-3}{x^2-1} dx$$

$$= \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \int \frac{C}{x-c} dx$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x \pm 1$$

$$Q(x) = (x+1)(x-1)$$

A, B, C : constantes que calculamos.

$$= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + C \ln|x-c|$$

$$\frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \boxed{x-3 = A(x-1) + B(x+1)}$$

Porque es el numerador q tenemos.

• Pongo valores para la ecuación. Si damos los mismos de antes es más rápido.

$$x=1 \Rightarrow 1-3 = A(1-1) + B(1+1) \Rightarrow -2 = 2B \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$x=-1 \Rightarrow -1-3 = A(-1-1) + B(-1+1) \Rightarrow -4 = -2A \Rightarrow \boxed{A = 2}$$

• Ahora ya hago la integral.

$$\int \frac{x-3}{x^2-1} dx = \int \frac{2x}{x+1} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx = \boxed{2 \ln|x-1| - \ln|x+1| + C}$$

2) $Q(x)$ tiene raíces múltiples

$$\frac{P(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$$

$$\text{Ej } \int \frac{2x+1}{x^3-3x+2} dx \quad x=2 \quad \begin{array}{l} x^3 - 3x + 2 \\ \hline (x-1)(x+2)(x-1) \end{array}$$

$$\frac{2x+1}{x^3-3x+2} = \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x+2) + B(x-1)^2 + C(x-1)}{(x+2)(x-1)^2}$$

numerosos.

$$\boxed{2x+1} = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2)$$

• $x=1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + 1 = A(1-1)^2 + B(1-1)(1+2) + C(1+2)$
 $3 = 3C \Rightarrow \boxed{C=1}$

• $x=-2 \Rightarrow 2 \cdot (-2) + 1 = A(-2-1)^2 + B(-2-1)(-2+2) + C(-2+2)$
 $-3 = 9A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{3}}$

Como ya no me quedan de los fracciones, doy el valor que yo quiero.

• $x=0 \Rightarrow 0 \cdot 2 + 1 = A(0-1)^2 + B(0-1)(0+2) + C(0+2) =$

$$1 = A - 2B + 2C$$

$$1 = -\frac{1}{3} - 2B + 2$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -2B$$

$$\boxed{B = \frac{1}{3}}$$

* FACTORIZAS ADELAN LAS INTEGRACIONES

$$\boxed{\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x-1)^{-2} dx} \rightarrow \text{PARA PODER INTEGRAR.}$$

4. Cambio de variable.

Sólo cambio parte de la integral que no se puede integrar.

Ej $\int \frac{e^x + 1}{1 - e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan t + C = \boxed{\arctan e^x + C}$

$\begin{cases} e^x = t \\ \text{también hay que cambiar el diferencial} \\ e^x dx = 1 dt \end{cases}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$$

Como lo que nos molesta es el $\sqrt[3]{x}$ pues "2" hay que elevarlo al mínimo común múltiplo de los de la $\sqrt[3]{x}$.

$$x = t^{\text{mcm}(2,3)} = t^6$$

$$dx = 6t^5 dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{\sqrt{t^6}}{1+\sqrt[3]{t^6}} \cdot 6t^5 dx =$$

$$= \int \frac{t^3}{1+t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{1+t^2} dt$$

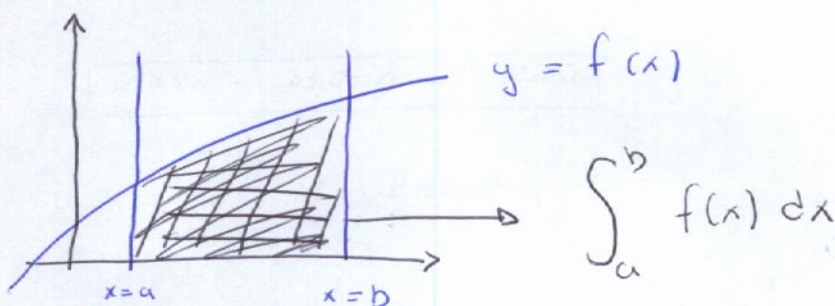
INTEGRALES DEFINIDAS (RIEMANN)

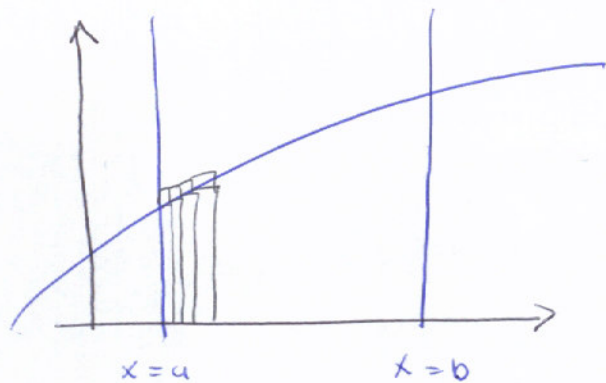
1) Nos interesa calcular el VALOR ACUMULADO por la magnitud en un intervalo de tiempo. $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 Función Primitiva.

2) Cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$; $x=b$.





Para calcular el área, usamos todas las áreas de rectángulos pequeños y la de los rectángulos grandes pero muy pocos para que esa diferencia sea pequeña.

Al ir dando lugar límites y al ser tan pequeños tienden a "0"

$$\underline{S} = \sum (\text{áreas rectángulos pequeños})$$

$$\overline{S} = \sum (\text{áreas rectángulos grandes})$$

$P =$ particiones de $[a, b]$ = base de rectángulos.

$$\lim_{P \rightarrow 0} \underline{S} = \lim_{P \rightarrow 0} \overline{S} = A = \int_a^b f(x) dx.$$

• CALCULAR DERIVADA.

• CALCULAR EL ÁREA.

• CALCULAR EL VALOR ACUMULATIVO

COMO LO PUEDEN
PREGUNTAR?

□ REGLA DE BARROW.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

PRIMITIVA SIN CONSTANTE. PORQUE AL RESTAR SE IRÍA.

$$F(x) = \int \underbrace{f(x)}_{\text{ALTURA RECTÁNGULOS}} \underbrace{dx}_{\text{BASE DE RECTÁNGULOS}} - \text{BASE DE RECTÁNGULOS}.$$

ALTURA
RECTÁNGULOS

$$\boxed{\text{BASE} \times \text{ALTURA} = \text{ÁREA}}$$

PUNTOS A. B. C

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_c^b f(x) dx$$

Ejercicio 7:

$$\int_0^1 e^{3x^2-2} x dx = \frac{1}{6} e^{3x^2-2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} e^{3 \cdot 1^2 - 2} - \frac{1}{6} e^{3 \cdot 0^2 - 2}$$

$$= \left[\frac{1}{6} e - \frac{1}{6} \right]$$

$$\frac{1}{6} \int e^{3x^2-2} \cdot 6x dx = \frac{1}{6} e^{3x^2-2}$$

13)

$$\int_0^1 \underbrace{4x}_{dv} \underbrace{e^{x-2}}_{du} dx$$

$$\begin{cases} v = 4x \longrightarrow dv = 4 \\ dv = e^{x-2} \longrightarrow v = \int e^{x-2} dx = e^{x-2} \end{cases}$$

$$4x \cdot e^{x-2} - \int e^{x-2} \cdot 4 dx = \boxed{4x e^{x-2} - 4e^{x-2} + C}$$

$$\rightarrow 4x e^{x-2} - 4e^{x-2} \Big|_0^1 = (4 \cdot 1 e^{1-2} - 4e^{1-2}) - (4 \cdot 0 \cdot e^{0-2} - 4e^{0-2})$$

$$= \cancel{4e^{-1}} - \cancel{4e^{-1}} - 0 + 4e^{-2} = \boxed{4e^{-2}}$$

$$15. \int_{-1}^1 \frac{4e^{3x}}{1+e^{2x}} dx$$

$$\boxed{e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t \xrightarrow{\text{derivative}} 1 dx = \frac{1}{t} dt}$$

$$\boxed{e^x dx = dt}$$

$$\int \frac{4t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{4t}{1+t^2} dt \Rightarrow \frac{4t^2}{-4t^2-4} \frac{t^2+1}{4}$$

aplicamos
la regla de la derivada

$$\Rightarrow \int 4 + \frac{-4}{t^2+1} dt = \int 4 dt - 4 \int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= 4t - 4 \operatorname{arccot} t \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Sustituir}}}{=} \boxed{4e^x - 4 \operatorname{arccot} e^x + C}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{4e^{3x}}{1+e^{2x}} dx = \left(4e^x - 4 \operatorname{arccot} e^x \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \left(4e^1 - 4 \operatorname{arccot} e^1 \right) - \left(4e^{-1} - 4 \operatorname{arccot} e^{-1} \right) =$$

$$= \boxed{4e - 4 \operatorname{arccot} e - 4e^{-1} + 4 \operatorname{arccot} e^{-1}}$$

ESERCIZIOS DE INTEGRALES DEFINIDAS.

$$1. \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = e - \sqrt{e}$$

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \Rightarrow \int \frac{1}{e^t} dt$$

$$\frac{1}{x} = t \quad \rightarrow \quad - \int e^t dt = -e^t = -e^{1/x}$$

$$-\frac{1}{x^2} dx = dt$$

$$\hookrightarrow \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \left(-e^{1/x} \right) \Big|_1^2 = -e^{1/2} + e = \boxed{e - \sqrt{e}}$$

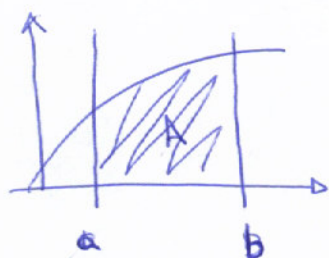
$$3. \int_0^1 (x^3 + 2) 5x^2 dx = \frac{25}{6}$$

$$\boxed{\int 5x^5 + 10x^2 dx = 5 \frac{x^6}{6} + 10 \frac{x^3}{3}}$$

$$\int_0^1 5x^5 + 10x^2 dx = \left(5 \frac{x^6}{6} + 10 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 =$$

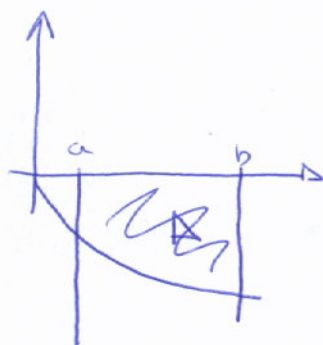
$$= \left(5 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{3} \right) - \left(\cancel{5 \cdot \frac{0}{6}} + \cancel{10 \cdot \frac{0}{3}} \right) = \frac{5}{6} + \frac{10}{3} = \boxed{\frac{25}{6}}$$

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES DEFINIDAS.



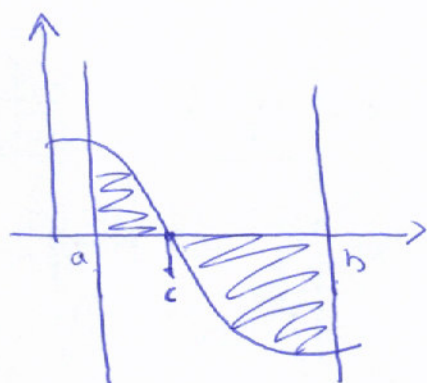
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

ÁREA COMPRENDIDA ENTRE $f(x)$, EL EJE x , Y LAS RECTAS $x=a$, $x=b$



$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

PARA ATORREARLOS DIBUJAR, PONGAMOS VALOR ABSOLUTO. $A = \int_a^b |f(x)| dx$



1º CALCULO EL PUNTO C. SI HAY MÁS CALCULO TODOS.

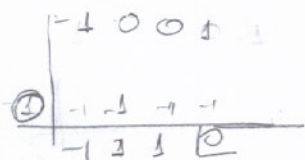
$$2º \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right| = A$$

ÁREA COMPRENDIDA ENTRE $f(x)$ PASA POR EL EJE x . LAS RECTAS $x=a$, $x=b$.

Ej. Calcular el área comprendida entre la gráfica de $f(x) = 1 - x^3$, el eje x y las rectas $x=0$, $x=2$.

$$\int_0^2 1 - x^3 dx =$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1.$$



$-x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow$ soluciones complejas.

• Divido en función en 2. Con el punto que acabo de sacar.

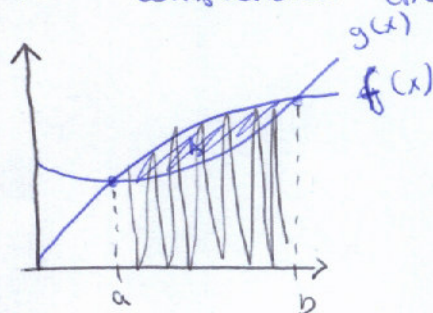
$$\Delta = \left| \int_0^2 1 - x^3 dx \right| = \left| \int_0^1 1 - x^3 dx \right| + \left| \int_1^2 1 - x^3 dx \right| =$$

$$= \left| \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \right| + \left| \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 \right| = \left| 1 - \frac{1}{4} - 0 + \frac{0^4}{4} \right| +$$

$$+ \left| 2 - \frac{2^4}{4} - 1 + \frac{1^4}{4} \right| = \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \boxed{\frac{14}{4} \text{ u}^2}$$

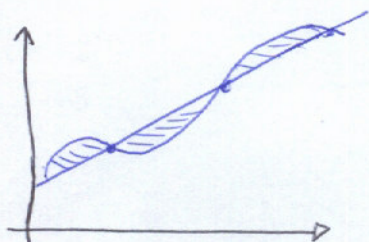
$$\nearrow \left| 2 - \frac{16}{4} - 1 + \frac{1}{4} \right| = \left| 2 - 4 - 1 + \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{11}{4} \right|$$

2. Área comprendida entre dos gráficos.



CALCULO TODO EL AREA DEBAJO DE $G(x)$ y $F(x)$ y DESDE LO RESTO Y ME SACA EL AREA DE "A".

$$\left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|$$



1° CALCULAR LOS PUNTOS DE CORTE ENTRE $f(x)$ y $G(x)$.

$$f(x) = g(x) \rightarrow x =$$

2° PASAR INTEGRAL EN TODOS LOS PUNTOS DE CORTE.

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right| + \dots$$

Ej. Calcular el área comprendida entre:

$$y = x ; y = \frac{x^2}{4}$$

• Puntos de corte.

$$\boxed{x=0} \quad \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$f(x) = \boxed{x=0}$$

$$\left| \int_0^4 x - \frac{x^2}{4} dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right| = \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{12} - \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{12}$$

$$\left| \frac{16}{2} - \frac{64}{12} - 0 - 0 \right| = \left| 8 - \frac{64}{12} \right| = \left| \frac{96}{12} - \frac{64}{12} \right| = \left| \frac{32}{12} \right|$$

$$= \left| \frac{8}{3} \right|$$

13. $x=2 ; y=x ; y = \frac{1}{x}$

Puntos de corte.

$$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\boxed{x=2}$$

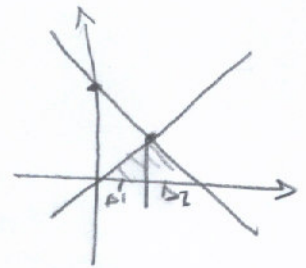
$$\left| \int_1^2 x - \frac{1}{x} dx \right| = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1$$

$$= 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 = \left| \frac{3}{2} - \ln 2 \right|$$

14. $y=0$; $y=x$; $x+y=4$

$$y=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x+y=4 \Rightarrow x+0=4 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$x+y=4 \Rightarrow x=4-y \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$



$$A_1 = \int_0^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2$$

$$A_2 = \int_2^4 (4-x) \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 = 16 - 8 - 8 + 2 = 2$$

$$\left[\int_0^2 \frac{x - (4-x)}{2x-4} \, dx + \int_2^4 \frac{x - (4-x)}{2x-4} \, dx = \left| \frac{x^2 - 4x}{2} \right|_0^2 + \left| \frac{x^2 - 4x}{2} \right|_2^4 \right]$$

$$= |4 - 8| + |16 - 16 - 4 + 8| = |4 + 4 = 8| = 8$$

↓

no se puede hacer de esa forma

x y no es el area que yo quiero.

